Chapitre 3

Fractions rationnelles

3.1 Structures

Un **anneau** est un ensemble $\mathbb{A}$ muni de deux opérations internes $+$ et $\times$ et d'éléments $0_{\mathbb{A}}$ et $1_{\mathbb{A}}$ qui vérifient :

associativité de l'addition :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A}\ \forall c \in \mathbb{A} \quad a + (b + c) = (a + b) + c\ ,$$

commutativité de l'addition :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A} \quad a + b = b + a\ ,$$

$0_{\mathbb{A}}$ **est élément neutre de l'addition :**

$$\forall a \in \mathbb{A} \quad a + 0_{\mathbb{A}} = a\ ,$$

tout élément de $\mathbb{A}$ a un opposé :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \exists b \in \mathbb{A} \quad a + b = 0_{\mathbb{A}}\ ,$$

associativité de la multiplication :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A}\ \forall c \in \mathbb{A} \quad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c\ ,$$

distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A}\ \forall c \in \mathbb{A} \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \quad \text{et} \quad (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)\ ,$$

1 **est élément neutre de la multiplication :**

$$\forall a \in \mathbb{A} \quad 1_{\mathbb{A}} \times a = a \times 1_{\mathbb{A}} = a\ .$$

Un anneau est dit **commutatif** quand, en plus des propriétés ci-dessus, la multiplication est commutative :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A} \quad a \times b = b \times a\ .$$

L'opposé d'un élément a d'un anneau est unique et noté $-a$.

On dit que a est **inversible** dans $\mathbb{A}$ quand il existe b dans $\mathbb{A}$ tel que $a \times b = b \times a = 1_{\mathbb{A}}$. Un tel élément b est unique ; on l'appelle **l'inverse de** a, et on le note a^{-1}.

Un **corps** $\mathbb{K}$ est un anneau commutatif tel que $0_\mathbb{K} \neq 1_\mathbb{K}$ et que tout élément différent de $0_\mathbb{K}$ a un inverse dans $\mathbb{K}$.

Un anneau commutatif $\mathbb{A}$ est dit **intègre** quand $0_\mathbb{A} \neq 1_\mathbb{A}$ et que

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A} \quad a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)\ .$$

Un corps est un anneau intègre.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **$\mathbb{K}$-algèbre** est un anneau $\mathbb{A}$ muni en plus d'une opération externe (multiplication par un scalaire) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (\lambda, a) & \longmapsto & \lambda \cdot a \end{array}$$

telle que l'addition de $\mathbb{A}$ et la multiplication par un scalaire font de $\mathbb{A}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et que

$$\lambda \cdot (a \times b) = (\lambda \cdot a) \times b = a \times (\lambda \cdot b)\ .$$

Notations habituelles : Le plus souvent, on note simplement 0 et 1 au lieu de $0_\mathbb{A}$ et $1_\mathbb{A}$. On note $a-b$ au lieu de $a+(-b)$, et on ne parenthèse pas les additions et soustractions (ceci est justifié par l'associativité de l'addition). On note la multiplication (aussi bien la multiplication interne que la multiplication par un scalaire) sans symbole, et sans parenthésage (ce qui est justifié par l'associativité et les propriétés de compatibilité entre la multiplication interne et la multiplication par un scalaire). Le produit $a \times a \times \cdots \times a$ (n facteurs a) est noté a^n.

Exercice 3.1

Une liste d'exemples à méditer, avec quelques questions.

1. $\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas un anneau.
2. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps.
3. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau commutatif. Montrer que c'est un corps si n est un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre si n n'est pas premier.
4. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors $M_n(\mathbb{K})$ (l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et colonnes, avec le produit matriciel) est une $\mathbb{K}$-algèbre. Montrer qu'elle n'est ni commutative ni intègre pour $n \geq 2$.
5. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative intègre.
6. L'ensemble des suites de nombres réels, avec l'addition $(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$, la multiplication $(a_n)\times(b_n) = (a_n b_n)$ et la multiplication par un scalaire réel $\lambda\cdot(a_n) = (\lambda a_n)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. Préciser les éléments neutres pour l'addition et la multipication.

Exercice 3.2

Dans un anneau intègre, on peut simplifier par un élément non nul : montrer que si $a \times b = a \times c$ avec $a \neq 0_\mathbb{A}$, alors $b = c$.

Exercice 3.3

Que se passe-t-il si $0_\mathbb{A} = 1_\mathbb{A}$ dans l'anneau $\mathbb{A}$?

Exercice 3.4

Si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre telle que $0_\mathbb{A} \neq 1_\mathbb{A}$, alors, pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$ on a $\lambda 1_\mathbb{A} = \mu 1_\mathbb{A}$ si et seulement $\lambda = \mu$. (On peut alors, en identifiant λ et $\lambda 1_\mathbb{A}$, considérer que $\mathbb{K}$ est contenu dans $\mathbb{A}$.)

Exercice 3.5

Dans un anneau commutatif $\mathbb{A}$, on a la formule du binôme :

$$\forall a \in \mathbb{A}\ \forall b \in \mathbb{A} \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad \text{(les coefficients binomiaux sont aussi notés } C_n^i) \ .$$

Est-ce qu'elle vaut toujours si l'anneau n'est pas commutatif ?

Exercice 3.6

Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}$? de $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K}$ est un corps) ?

3.2 Corps de fractions d'un anneau intègre. Fractions rationnelles

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif intègre (par exemple $\mathbb{Z}$, ou l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$). On va fabriquer à partir de $\mathbb{A}$ un corps en inversant les éléments non nuls de $\mathbb{A}$.

Sur l'ensemble des couples (a,b) d'éléments de $\mathbb{A}$ avec $b \neq 0$, on définit la relation $\sim$ par

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{si et seulement si} \quad ad = bc \ .$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. On note $\dfrac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a,b) ; on a donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$. On note $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ l'ensemble de ces classes d'équivalences (fractions). On définit sur $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ l'addition et la multiplication par :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

Ces opérations sont bien définies : pour l'addition, ceci veut dire que si $(a,b) \sim (a',b')$ et $(c,d) \sim (c',d')$, alors $(ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$.

Théorème 3.1 $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$*, muni de l'addition et de la multiplication, est un corps. On l'appelle le* ***corps de fractions de*** $\mathbb{A}$*. L'application* $\mathbb{A} \to \mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ *qui envoie* a *sur* $\dfrac{a}{1}$ *est un homomorphisme injectif d'anneaux, qui permet d'identifier* $\mathbb{A}$ *à un sous-anneau de* $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$.

Avec cette identification, tout élément b non nul de $\mathbb{A}$ a un inverse $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$ dans $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$, et $\dfrac{a}{b} = a \times b^{-1}$.

Le corps de fractions de $\mathbb{Z}$ est bien sûr $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels.

Définition 3.2 *Le* ***corps des fractions rationnelles*** *en* X *à coefficients dans le corps* $\mathbb{K}$ *est le corps de fractions de* $\mathbb{K}[X]$*. On le note* $\mathbb{K}(X)$.

On peut choisir un représentant privilégié pour une fraction rationnelle : Une fraction rationnelle est dite sous **forme réduite** quand elle est écrite comme $\dfrac{A}{B}$, où A et B sont des polynômes premiers entre eux et B est unitaire. Une fraction rationnelle a une unique forme réduite. Si $F = \dfrac{P}{Q}$, on trouve sa forme réduite en calculant un pgcd D de P et Q ; on a alors $Q = \lambda\, D\, B$ avec B polynôme unitaire et $\lambda \in \mathbb{K}$ constante non nulle, et on définit A par $P = \lambda\, D\, A$; la forme réduite de F est $\dfrac{A}{B}$.

On a l'habitude de dire que P est le numérateur et Q le dénominateur de la fraction $\frac{P}{Q}$. Mais ceci est un abus de langage, car le numérateur et le dénominateur sont associés à un représentant de la fraction, et pas à la fraction elle-même. On peut cependant parler du numérateur et du dénominateur de la forme réduite d'une fraction rationnelle, grâce à l'unicité de celle-ci.

Exercice 3.7

Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3+4X^2+X-6}{X^4-X^3-5X^2-X-6} \qquad \frac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2} \; .$$

Exercice 3.8

Pour $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$. Montrer que $\deg(F)$ est bien défini (ne dépend pas du représentant choisi de la fraction rationnelle) et que $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$ et $\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$.

Montrer que les fractions rationnelles de degré ≤ 0 forment une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

3.3 Fonction rationnelle

Définition 3.3 *Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle, $F = \frac{A}{B}$ sa forme réduite. Un* pôle *de F (dans $\mathbb{K}$) est une racine de B (dans $\mathbb{K}$). La multiplicité du pôle est sa multiplicité en tant que racine de B. Un* zéro *de F (dans $\mathbb{K}$) est une racine de A (dans $\mathbb{K}$). La multiplicité du zéro est sa multiplicité en tant que racine de A*

Une fraction rationnelle a un nombre fini de pôles. Une fraction rationnelle non nulle a un nombre fini de zéros.

Si $F = \frac{A}{B}$ est une fraction rationnelle sous forme réduite, et c un élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle de F, alors on peut définir la valeur de F en c par

$$F(c) = \frac{A(c)}{B(c)} \in \mathbb{K} \; .$$

Si $\frac{C}{D}$ est un autre représentant de F et que $D(c) \neq 0$, alors on a aussi $F(c) = \frac{C(c)}{D(c)}$.

On obtient ainsi la **fonction rationnelle** $c \mapsto F(c)$ associée à la fraction rationnelle F. Cette fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble (fini) des pôles de F. On a $F(c) = 0$ si et seulement si c est un zéro de F. Si c n'est pôle ni de F ni de G, on a $(F+G)(c) = F(c) + G(c)$ et $(F \times G)(c) = F(c) \times G(c)$.

Théorème 3.4 *(On suppose le corps $\mathbb{K}$ infini.) Soit F et G deux fractions rationnelles telles que pour tout $c \in \mathbb{K}$ qui n'est pôle ni de F ni de G, on a $F(c) = G(c)$. Alors $F = G$.*

On peut substituer une fraction rationnelle non constante à l'indéterminée dans une autre fraction rationnelle. Soit $G = \frac{A}{B}$ non constante sous forme réduite, et

$$F = \frac{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n}{b_0 + b_1 X + \cdots + b_q X^q} \; ,$$

alors on pose

$$\begin{aligned} F(G) &= (a_0 + a_1 G + \cdots + a_n G^n) \times (b_0 + b_1 G + \cdots + b_q G^q)^{-1} \\ &= B^{q-n} \frac{a_0 B^n + a_1 A B^{n-1} + \cdots + a_n A^n}{b_0 B^q + b_1 A B^{q-1} + \cdots + b_q A^q} \end{aligned}$$

Cette substitution est bien licite car la fraction rationnelle $b_0 + b_1 G + \cdots + b_q G^q$ n'est pas la fraction rationnelle nulle.

Proposition 3.5 *Soit G une fraction rationnelle non constante. L'application $F \mapsto F(G)$ de $K(X)$ dans lui-même est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

La substitution correspond à la composition des fonctions rationnelles, là où la composée est définie : si $c \in \mathbb{K}$ n'est pas un pôle de G et $G(c)$ n'est pas un pôle de F, alors c n'est pas un pôle de $F(G)$ et $F(G)(c) = F(G(c))$.

Exercice 3.9

Soit $c \in \mathbb{K}$. L'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ dont c n'est pas pôle est-il une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$? L'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ dont c est un zéro est-il une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$?

Exercice 3.10

Comparer les pôles et les zéros de $F(X+a)$ à ceux de F.

Exercice 3.11

Soit $G = \dfrac{aX+b}{cX+d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Montrer que $F \mapsto F(G)$ est un homomorphisme bijectif de $\mathbb{K}(X)$ sur lui-même, et trouver la bijection réciproque.

3.4 Décomposition en éléments simples

3.4.1 Le théorème général

Théorème 3.6 *Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle, où on suppose B unitaire non constant ($\deg(B) > 0$). Soit*

$$B = P_1^{\alpha_1} \cdots P_n^{\alpha_n}$$

sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ (les P_i sont irréductibles unitaires distincts deux à deux, et les α_i sont des entiers strictement positifs). Alors il existe une unique famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$

$$(E, C_{1,1}, C_{1,2} \ldots, C_{1,\alpha_1}, C_{2,1}, \ldots, C_{2,\alpha_2}, \ldots, C_{n,\alpha_n})$$

telle que $\deg(C_{i,j}) < \deg(P_i)$ (ou $C_{i,j} = 0$) pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, \alpha_i$, et que

$$F = E + \frac{C_{1,1}}{P_1} + \frac{C_{1,2}}{P_1^2} + \cdots + \frac{C_{1,\alpha_1}}{P_1^{\alpha_1}} + \frac{C_{2,1}}{P_2} + \cdots + \frac{C_{2,\alpha_2}}{P_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{C_{n,\alpha_n}}{P_n^{\alpha_n}} .$$

Les fractions rationnelles $\dfrac{C}{P^j}$ avec P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et $\deg(C) < \deg(P)$, $C \neq 0$, s'appellent des **éléments simples**. La décomposition de F donnée par le théorème ne dépend pas du choix du représentant (A, B) pour la fraction rationnelle. Elle s'appelle la **décomposition en éléments simples de** F.

Le polynôme E s'appelle la **partie entière** de F. Si $F = \dfrac{A}{B}$, c'est le quotient de la division euclidienne de A par B.

Les éléments simples qui peuvent apparaître dans la décomposition de F sont les $\frac{C}{P^j}$ où P est un facteur irréductible du dénominateur de la forme réduite de F, et j est inférieur ou égal à la plus grande puissance α avec laquelle P divise ce dénominateur ; de plus, il y a nécessairement un élément simple $\frac{C}{P^\alpha}$ avec $C \neq 0$ dans la décomposition de F.

3.4.2 Pratique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$, qu'on supposera toujours sous forme réduite,

$$B = (X - a_1)^{\alpha_1}(X - a_2)^{\alpha_2} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n} .$$

Les $a_i \in \mathbb{C}$ sont les pôles de F, et α_i leurs multiplicités. La décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = E + \frac{c_{1,1}}{X - a_1} + \frac{c_{1,2}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1,\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{c_{2,1}}{X - a_2} + \cdots + \frac{c_{n,\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}} ,$$

où E est la partie entière de F et $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, \alpha_i$. La partie

$$\frac{c_{i,1}}{X - a_i} + \frac{c_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{c_{i,\alpha_i}}{(X - a_i)^{\alpha_i}}$$

de la décomposition s'appelle la **partie polaire relative au pôle** a_i. Remarquer que si l'on soustrait à F sa partie polaire relative au pôle a_i, on obtient une fraction rationnelle qui n'a plus a_i pour pôle.

Le nombre c_{i,α_i} se détermine facilement.

Proposition 3.7 *(Les notations sont celles qui ont été introduites ci-dessus). Si $B = (X - a_i)^{\alpha_i} S$, avec $S(a_i) \neq 0$, on a $c_{i,\alpha_i} = A(a_i)/S(a_i)$. Si $\alpha_i = 1$ (a_i est pôle simple de F), alors $c_{i,1} = A(a_i)/B'(a_i)$.*

Exemple :

$$F = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}.$$

On trouve facilement les racines $0, 1, -1, -2$ du dénominateur (toutes simples). la décomposition aura la forme

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{X + 2}.$$

La dérivée du dénominateur est $4X^3 + 6X^2 - 2X - 2$. On obtient donc en évaluant le quotient du numérateur par la dérivée du dénominateur : $a = \frac{-2}{-2} = 1$, $b = \frac{12}{6} = 2$, $c = \frac{6}{2} = 3$, $d = \frac{6}{-6} = -1$, et donc

$$F = \frac{1}{X} + \frac{2}{X - 1} + \frac{3}{X + 1} + \frac{-1}{X + 2}.$$

Il est toujours prudent de vérifier. Une première méthode consiste à multiplier par X des deux côtés et faire tendre X vers $+\infty$; on trouve bien 5 des deux côtés. Une deuxième méthode consiste à fixer pour X une valeur qui n'est pas un pôle (par exemple 2) et à évaluer des deux côtés : on trouve bien $\frac{13}{4}$ des deux côtés.